The Conway potential functions for pretzel links and Montesinos links

AUTHOR(S):

中川, 洋子; 原, 正雄; 大山, 淑之

数理解析研究所講究録
636巻 1987年 46-54

The Conway potential functions for pretzel links and Montesinos links

山口女子大　中川洋子 (Yoko Nakagawa)
早大理工　原　正雄 (Masao Hara)
早大理工　大山淑之 (Yoshiyuki Ohyama)

J.W. ConwayによりAlexander polynomialと密接な関係にあるpotential functionが定義され([2]), R. Hartleyにより多変数のpotential functionの存在が示された。([3]) Hartleyは又、2-bridge linkに対し2変数potential functionのaxiomatic determinationを与えている。

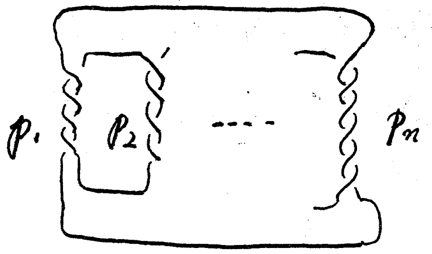
この稿においては2-components pretzel linkとMontesinos linkに対し2変数potential functionが"simple axioms"で定められることを示す。

Main Theorem

2-components pretzel linksとMontesinos linksの2変数potential functionは $t_1t_2+t_1^{-1}t_2^{-1}$, $t_1t_2^{-1}+t_1^{-1}t_2$, $t_1^2+t_2^2$, $t_2^2+t_2^{-2}$ のintegral polynomialで表わされる。

§1. 諸定義

・pretzel link とは下図のような p_1 から p_n の half twists の 2-stranded braid から成る link であり $\mathcal{L}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ と表わす。



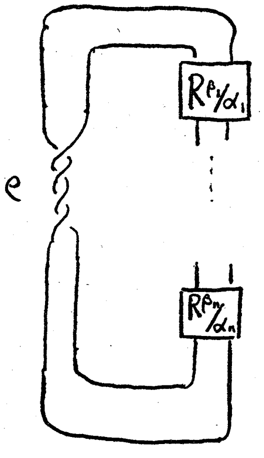
<u>lemma</u> pretzel link $\mathcal{L}(p_1\cdots,p_n)$ が 2-components link となるのは次の2つの場合である。

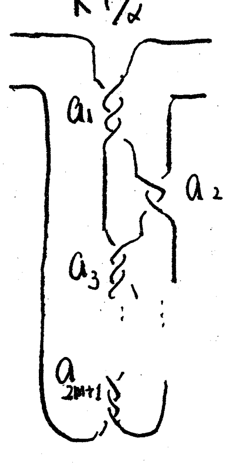
(I) n : even p_i : odd $(i=1,2,\cdots,n)$

(II) p_1, p_ℓ : even $(1\neq\ell)$

p_k : odd $(k\neq 1,\ell,$ and $k=2,3,\cdots,n)$

・Montesinos link は下図のような projection を持つ link であり rational tangle $R_{\beta/\alpha}$ とは下図のような tangle で $\alpha.\beta$ は continued fraction により定義される。





$$\beta/\alpha=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{2m+1}}}}}$$

(ここで α,β は互いに素)

Montesinos link を $M(e; \beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_2, \cdots, \beta_n/\alpha_n)$ とあらわし、
ここで $e \in \mathbb{Z}$ β_i/α_i は reduced fraction

<u>lemma</u> Montesinos link $M(e; \beta_1/\alpha_1, \cdots \frac{\beta_n}{\alpha_n})$ が 2-components link となるのは 次の2つの場合のいずれかである。

(I) $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \cdots = P(\alpha_n) = 1$

and $P(e + \sum_{i=1}^{n} \beta_i) = 0$

(II) $P(\alpha_i) = 0$ (for some i, $1 \leq i \leq n$)

and $n - \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i) = 2$

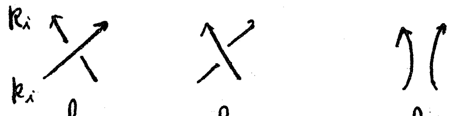
ここで $P(a) = 0$ a : even とする。

$P(a) = 1$ a : odd

∘ Conway potential function

2-components link の Conway potential function ∇ は 以下の axioms で定義できる。

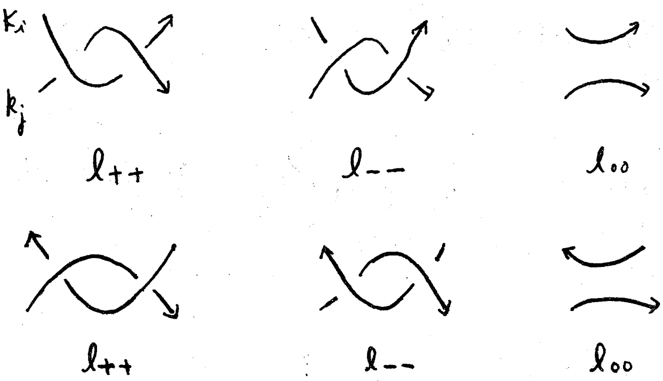
(1) $\nabla_{l_+} = \nabla_{l_-} + (t_i - t_i^{-1}) \nabla_{l_0}$



l_+ l_- l_0

ここで k_i とは link の同じ component であることを示す

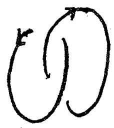
(2) $\nabla_{l_{++}} + \nabla_{l_{--}} = \begin{cases} (t_i t_j + t_i^{-1} t_j^{-1}) \nabla_{l_{00}} & (2-1) \\ (t_i t_j^{-1} + t_i^{-1} t_j) \nabla_{l_{00}} & (2-2) \end{cases}$



(2-1)

(2-2)

(3) split link に対して $\nabla = 0$

(4) simple positive clasp に対して $\nabla = 1$ 

(2), (3), (4) を "simple axioms" と呼ぶことにする.

§2 2-components pretzel links の potential functions

2-components pretzel link に対して 2変数 potential function が "simple axioms" で決定できることは §3 にゆだね. 実際の計算結果のみを示す.

3以上の components の多変数 Alexander polynomial は即に計算されているので ([4]) この計算結果により pretzel link の多変数 Alexander polynomial は すべて決定できたことになる。

$X = \{1, 2, \cdots, n\}$, $\Omega_k = \{X_k \subset X \mid X_k$ の elements の数が $k\}$ とおく。又. Y を X の subset とし $\Omega_k(Y) = \{X_k \in \Omega_k \mid X_k \subset X - Y\}$ とおく。

<u>Theorem</u> 2-components pretzel link の potential function $\nabla_{L(p_1, \cdots, p_n)}$ は 以下のようになる.

(Case 1) n : even p_i : odd $(i=1,\cdots,n)$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{\mathcal{L}}(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big[\sum_{X_k \in \Omega_k} \prod_{h \in X - X_k} A\Big(\frac{p_h+1}{2}\Big) \cdot (-1)^k \prod_{j \in X_k} A\Big(\frac{p_j-1}{2}\Big) \Big] B\Big(\frac{n-2k}{2}\Big),
\end{aligned}
$$

ここで $\prod_{\phi} A(n') = 1$

$$
A(n') = \frac{(t_1 t_2^{-1})^{n'} - (t_1^{-1} t_2)^{n'}}{t_1 t_2^{-1} - t_1^{-1} t_2}
$$

$$
B(n') = \frac{(t_1 t_2)^{n'} - (t_1^{-1} t_2^{-1})^{n'}}{t_1 t_2 - t_1^{-1} t_2^{-1}}
$$

(Case 2) p_1, p_l : even p_i $(i \neq 1, l,\ i=2,3 \cdots n)$; odd

$$
\nabla_{\mathcal{L}}(p_1, \cdots, p_n) = \sum_{k=0}^{n-2} \Big[\sum_{X_k \in \Omega_k(1,l)} \prod_{h \in X - X_k,\ h \neq 1, l} C\Big(\frac{p_h+1}{2}\Big)
$$

$$
\times (-1)^k \prod_{j \in X_k} C\Big(\frac{p_j - 1}{2}\Big) \Big] \nabla_{\mathcal{L}}(p_1, p_l, [n-2k-2])
$$

ここで $\prod_{\phi} C(n') = 1$

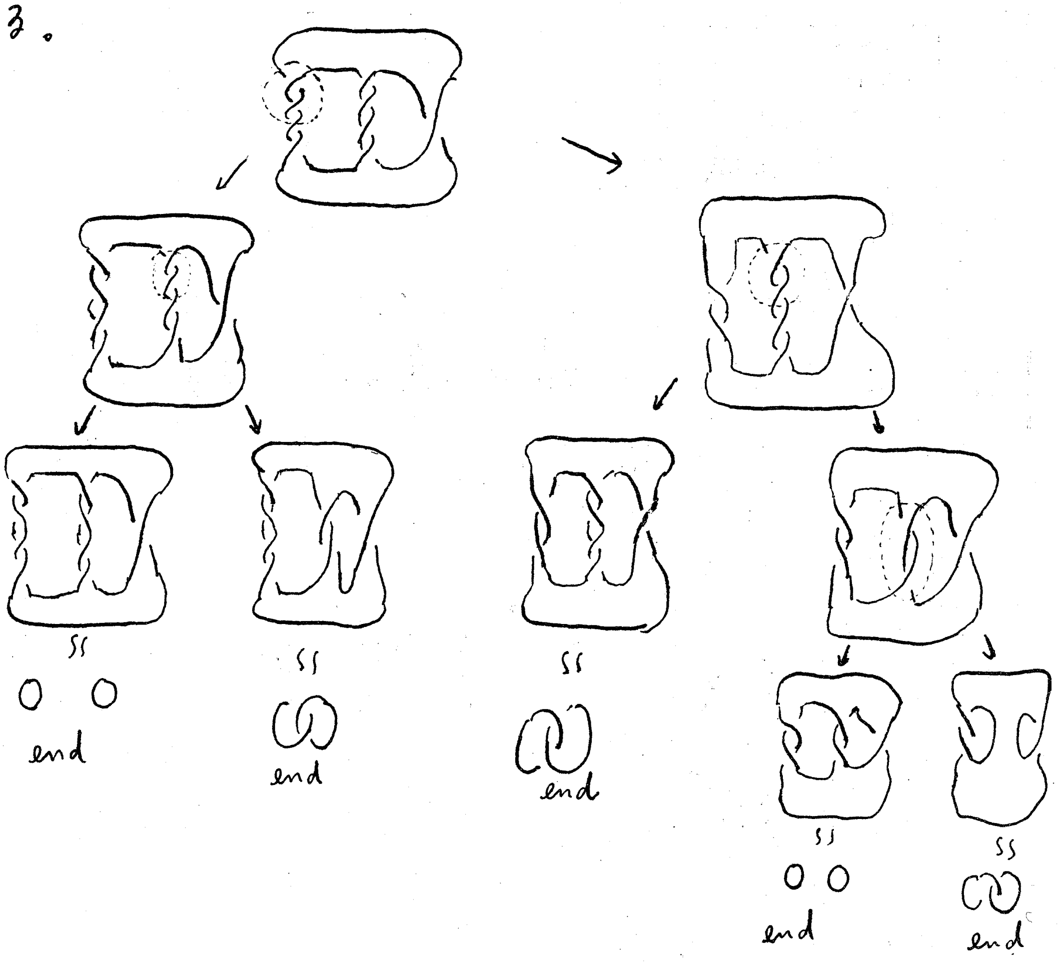
$$
C\Big(\frac{p_i \pm 1}{2}\Big) = \begin{cases} \dfrac{t_1^{p_i \pm 1} - t_1^{-(p_i \pm 1)}}{t_1^2 - t_1^{-2}} & (1 < i < l) \\[2ex] \dfrac{t_2^{p_i \pm 1} - t_2^{-(p_i \pm 1)}}{t_2^2 - t_2^{-2}} & (l < i \leq n) \end{cases}
$$

$$
\nabla_{\mathcal{L}}(p_1, p_l, [n']) = \begin{cases}
A\Big(\frac{p_1}{2}\Big) A\Big(\frac{p_l}{2}\Big) \Big\{ \frac{n'+2}{2} (t_1 t_2^{-1} + t_1^{-1} t_2) \\
\quad - \frac{n'}{2} (t_1 t_2 + t_1^{-1} t_2^{-1}) \Big\} - A\Big(\frac{p_1 - 2}{2}\Big) A\Big(\frac{p_l}{2}\Big) \\
\quad - A\Big(\frac{p_1}{2}\Big) A\Big(\frac{p_l - 2}{2}\Big) & (n' : \text{even}) \\
A\Big(\frac{p_1}{2}\Big) B\Big(\frac{p_l}{2}\Big) \Big\{ \frac{n'+1}{2} (t_1 t_2 + t_1^{-1} t_2^{-1} \\
\quad - \frac{n'+1}{2} (t_1 t_2^{-1} + t_1^{-1} t_2) - A\Big(\frac{p_1 - 2}{2}\Big) B\Big(\frac{p_l}{2}\Big) \\
\quad - A\Big(\frac{p_1}{2}\Big) B\Big(\frac{p_l - 2}{2}\Big) & (n' : \text{odd})
\end{cases}
$$

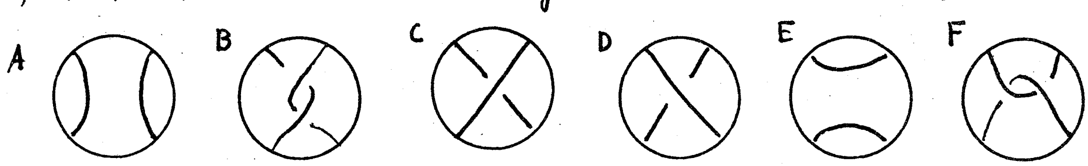
§3 Montesinos link の potential function について

link (tangle) に対して potential function の replacement (axiom (2)) をほどこして得られる tree を tree of replacement と呼ぶ。

又、tree の degree 1 の頂点の link を その tree の end という。下図は pretzel link $\mathcal{L}(4.4.1)$ の tree of replacement である。

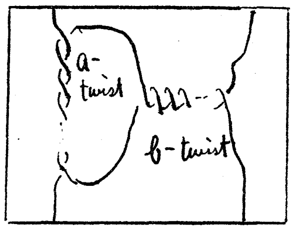


<u>Proposition</u> rational tangle T の tree of replacement で end が A, B, C, D, E, F のいずれかの tangle になるものが存在する。



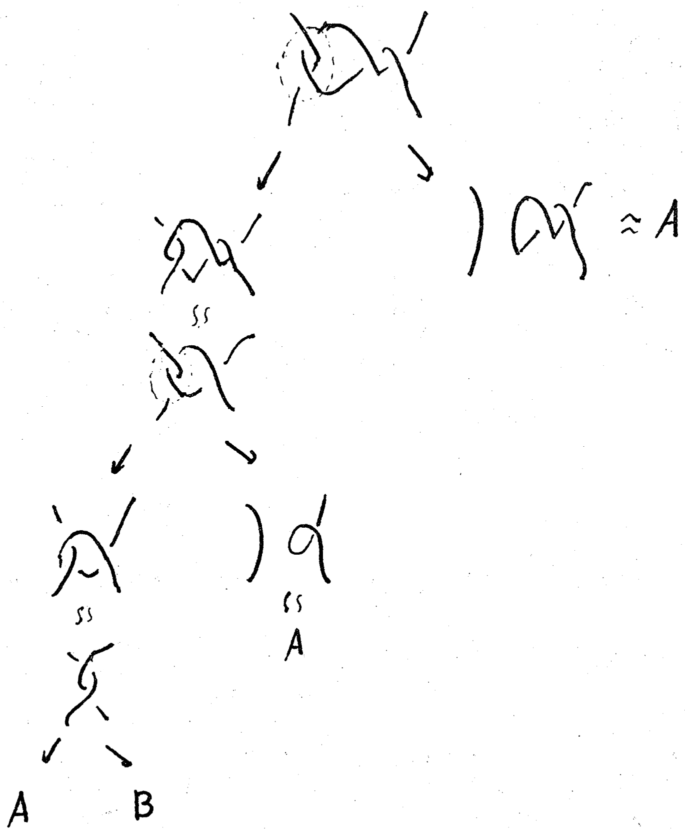
Propositionは以下のlemmaをくり返し使うことにより証明される。

<u>lemma</u> $T_{a,b}$を下図のようなtangleとする。$T_{a,b}$のtree of replacementでendがpropositionのAからFのいずれかになるものが存在する。



$T_{a,b}$

証明のかわりに$T_{2,2}$のtree of replacementを示す.



<u>Corollary</u> 2-bridge link は end が simple clasp 又は split link であるような tree of replacement を持つ。

<u>Theorem</u> 2-components Montesinos link は end が simple clasp 又は split link であるような tree of replacement を持つ。

証明）

各 rational tangle に対し proposition を用いることにより、A から F になる。A から D の tangle はすべて1ヶ所に集めることにより simple clasp, split link 又は 2-bridge link を得る。Corollary により 2-bridge link は求める tree of replacement を持つ。 □

Theorem により 2-components Montesinos link の potential function は $t_1t_2+t_1^{-1}t_2^{-1}$, $t_1t_2^{-1}+t_1^{-1}t_2$, $t_1^2+t_1^{-2}$, $t_2^2+t_2^{-2}$ の多項式になることが容易にわかる。

Reference

[1] G. Burde & H. Zieschang; Knots. de Gruyter Studies in Mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin New York 1985

[2] J. H. Conway; An enumeration of knots and links. Computational problems in abstract algebra, Proc. Conf. Oxford 1967 (ed. J. Leech) 329-358, Pergamon Press, New York.

[3] R. Hartley; The Conway potential function for links Comment. Math. Helv. 58 (1983) 365-378

[4] Y. Nakagawa ; On the Alexander polynomials of pretzel links $L(p_1, p_2 \cdots, p_n)$. Kobe J. Math., 3 (1986) 167 – 177

[5] Y. Nakanishi ; Fox's congruence classes and Conway's potential functions of knots and links. to appear.

[6] D. Rolfsen ; Knots and links, Publish or Perish, Inc. Barkley 1976

[7] G. Torres : On the Alexander polynomials. Ann. of Math. 57 (1953), 57-89